ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM THỊ NGỌC

THÁC TRIỂN CHỈNH HÌNH KIỂU HARTOGS-CHIRKA

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

PHẠM THỊ NGỌC

THÁC TRIỂN CHỈNH HÌNH KIỂU HARTOGS-CHIRKA

CHUYÊN NGÀNH: TOÁN GIẢI TÍCH
MÃ SỐ: 8 46 01 02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
GS. TSKH. NGUYỄN QUANG DIỆU

THÁI NGUYÊN - 2019

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan công trình trên là do tôi nghiên cứu dưới sự hướng dẫn của GS.TSKH Nguyễn Quang Diệu. Các kết quả nêu trong luận văn này là trung thực và chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình khoa học nào khác.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2019

Tác giả

Phạm Thị Ngọc

XÁC NHẬN	**XÁC NHẬN**
CỦA KHOA CHUYÊN MÔN	**CỦA NGƯỜI HƯỚNG DẪN**

GS.TSKH Nguyễn Quang Diệu

Lời cảm ơn

Trong quá trình học tập và nghiên cứu để hoàn thành luận văn tôi đã nhận được sự giúp đỡ nhiệt tình của người hướng dẫn, GS.TSKH Nguyễn Quang Diệu.

Tôi cũng muốn gửi lời cảm ơn bộ môn Giải tích, Khoa Toán, đã tạo mọi điều kiện thuận lợi, hướng dẫn, phản biện để tôi có thể hoàn thành tốt luận văn này. Do thời gian có hạn, bản thân tác giả còn hạn chế nên luận văn có thể có những thiếu sót. Tác giả mong muốn nhận được ý kiến phản hồi, đóng góp và xây dựng của các thầy cô, và các bạn.

Tôi xin trân trọng cảm ơn.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2019

Tác giả

Phạm Thị Ngọc

Mục lục

Mở đầu

1. Lí do chọn đề tài.

Thác triển chỉnh hình là một bài toán quan trọng của giải tích phức một biến.Trong C mọi miền phẳng đều là miền chỉnh hình. Điều này có nghĩa là tồn tại một hàm chỉnh hình không thể mở rộng lên một miền rộng hơn thật sự. Tuy nhiên trong trường hợp nhiều chiều (C^n , n $\geq$ 2) thì các kết quả trên không còn đúng nữa . Định lý cổ điển của Hartogs nói rằng mọi hàm chỉnh hình trên lân cận của biên một song đĩa đều mở rộng chỉnh hình lên song đĩa. Định lý này đã được Chirka phát triển cho các hàm chỉnh hình trên lân cận của đồ thị một hàm số liên tục trên đĩa đơn vị. Đây là một mở rộng rất sáng tạo và là cảm hứng để các nhà toán học đi sau nghiên cứu.

2. Mục đích nghiên cứu.

Luận văn nghiên cứu: Thác triển chỉnh hình kiểu Hatogs - Chirka. Chúng tôi cơ bản trình bày theo một bài báo chuyên khảo của Barret và Bharali.

3. Nhiệm vụ nghiên cứu

Nghiên cứu hai định lý cơ bản: định lý thác trển Hatogs và định lý Chirka về mở rộng hàm chỉnh hình trong lân cận của một đồ thị.

4. Phương pháp nghiên cứu

Dùng các phương pháp kỹ thuật của lý thuyết đa thế vị và giải tích phức.

5. Cấu trúc luận văn.

Luận văn bao gồm hai chương chính.

• *Chương 1: Kiến thức chuẩn bị.* Chương này tôi sẽ nhắc lại một số kiến thức cơ bản của Giải tích phức nhằm phục vụ cho chương 2.

• *Chương 2: Định lý thác triển Hartog và các mở rộng.* Trong chương này sẽ trình bày lại định lý Hartogs và định lý kiểu Hartogs-Chirka về thác triển hàm chỉnh hình trong lân cận đồ thị.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng ta sẽ nhắc lại một số kiến thức chuẩn bị về hàm chỉnh hình một biến và nhiều biến sẽ được dùng về sau. Khái niệm quan trọng là miền chỉnh hình, miền giả lồi cùng với nguyên lý liên tục để nhận biết các miền giả lồi.

1.1 Hàm chỉnh hình một biến và nhiều biến

Định nghĩa 1.1.1. *Hàm f xác định trong miền $D \subset \mathbb{C}$ với giá trị trong $\mathbb{C}$ được gọi là chỉnh hình tại $z_0 \in D$ nếu tồn tại $r > 0$ để f là $\mathbb{C}$-khả vi tại mọi $z \in \Delta(z_0, r) \subset D$.*

Nếu f chỉnh hình tại mọi $z \in D$ thì ta nói f chỉnh hình trên D.

Ví dụ 1.1.2. *Các hàm đa thức chỉnh hình trên toàn mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Các hàm hữu tỷ chỉnh hình trên $\mathbb{C}$ trừ ra tại các điểm mà nó không xác định.*

Công thức tích phân Cauchy sau đây là định lý nền tảng nhất của giải tích phức một biến.

Định lý 1.1.3. *Cho hàm $f(z)$ chỉnh hình trên miền D và γ là một chu tuyến trong D sao cho miền γ^0 giới hạn bởi γ nằm trong D. Khi đó với mọi $z_0 \in \gamma^0$, ta có*

a)
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \tag{1.1}$$

b) *Với $n \geq 1$ ta có*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \tag{1.2}$$

Chứng minh. a) Lấy $\delta > 0$ đủ bé để hình tròn $\Delta(z_0, \delta) \subset \gamma^0$, phần mặt phẳng giới hạn bởi γ. Ký hiệu C_δ là biên của $\Delta(z_0, \delta)$ và đặt

$$D_{\gamma,\delta} = \gamma^0 \backslash \Delta(z_0, \delta).$$

Do $D_{\gamma,\delta}$ là miền 2-liên, nên ta có

$$\int_{\gamma \cup C_\delta^-} \frac{f(\nu)}{\nu - z_0} d\nu = 0.$$

Từ đó có đẳng thức

$$\int_\gamma \frac{f(\nu)}{\nu - z_0} d\nu = \int_{C_\delta} \frac{f(\eta)}{\eta - z_0} d\eta. \tag{1.3}$$

Bàng cách tham số hóa $\eta = a + \delta e^{i\phi}, d\eta = i\delta e^{i\phi} d\phi$ ta có

$$\begin{aligned}
\int_{C_\delta} \frac{f(\eta)}{\eta - z_0} d\eta &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{i\varphi})}{\rho e^{i\varphi}} \rho e^{i\varphi} d\varphi \\
&= i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\varphi}) d\varphi \\
&= i \int_0^{2\pi} [f(z_0 + \rho e^{i\varphi}) - f(z_0)] d\varphi + 2\pi i f(z_0).
\end{aligned}$$

Cho $\delta \to 0$ ta có

$$\lim_{\delta \to 0} \int_0^{2\pi} [f(z_0 + \rho e^{i\varphi}) - f(z_0)] d\varphi = 0.$$

Vậy ta có

$$\lim_{\delta \to 0} \int_\gamma \frac{f(\eta)}{\eta - z_0} d\eta = 2\pi i f(z_0). \tag{1.4}$$

Kết hợp lại ta có điều phải chứng minh.

b. Bằng cách đạo hàm dưới dấu tích phân ta có công thức phải chứng minh. □

Nhờ công thức tích phân Cauchy ta chứng minh được kết quả sau về biểu diễn địa phương một hàm chỉnh hình thành một chuỗi thừa.

Định lý 1.1.4. *Cho f là hàm chỉnh hình trên miền mở D. Khi đó với mọi $a \in D$, hàm f có thể khai triển thành chuỗi lũy thừa trong mọi lân cận đủ nhỏ của a*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n. \tag{1.5}$$

Hơn nữa các hệ số của chuỗi là được tính theo công thức

$$c_n := \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Từ định lý trên chúng ta có thể hiểu khái niệm hàm chỉnh hình nhiều biến như sau.

Định nghĩa 1.1.5. *Hàm f được gọi là chỉnh hình tại $z \in \mathbb{C}^n$ nếu f có thể khai triển được thành chuỗi luỹ thừa trong lân cận của z . Hàm f chỉnh hình trên miền D nếu nó chỉnh hình tại mọi điểm $z \in D$*

Tương tự như định lý Cauchy cho hàm một biến phức, chúng ta có kết quả sau đây:

Định lý 1.1.6. *Giả sử $U = U(a, r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| < r_j \ \forall j = 1, \ldots, n\}$ là đa đĩa tâm a đa bán kính $r = (r_1, \ldots, r_n)$ và*

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| = r_j \quad \forall j = 1, \ldots, n\}.$$

Nếu f là hàm liên tục trên $\overline{U}$ và chỉnh hình trong U thì

$$f(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int_\Gamma \frac{f(\eta) d\eta_1 \cdots d\eta_n}{(\eta_1 - z_1) \cdots (\eta_n - z_n)} \quad \forall z \in U. \tag{1.6}$$

Định lý sau đây được chứng minh tương tự như một biến.

Định lý 1.1.7. *Giả sử $\{f_n\}$ hội tụ đều trên mọi tập compact trong D tới hàm f, thì hàm f chỉnh hình trên D.*

Chứng minh. Cho $z_0 \in D$. Chọn $r > 0$ đủ bé để $\overline{U}(z_0, r) \subset D$. Theo công thức tích phân Cauchy với mọi $z \in \overline{U}(z_0, r)$ ta có

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f_n(\eta)}{\eta - z} d\eta.$$

Do (f_n) hội tụ đều tới f trên $\partial D(z_0, r)$ bằng cách tiến đến giới hạn dưới dấu tích phân ta nhận được

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f_n(\eta)}{\eta - z} d\eta$$

với mọi $z \in D(z_0, r)$. Vì thế f chỉnh hình trên $D(z_0, r)$. □

Sử dụng định lý trên chúng ta có nguyên lý sau đây về tính compact của họ các hàm chỉnh hình:

Định lý 1.1.8 (Định lý Montel). *Giả sử D là một miền trong $\mathbb{C}$ và $F \subset H(D)$. Khi đó F bị chặn đều trên các tập compact nếu và chỉ nếu mọi dãy $\{f_n\} \subset F$ chứa một dãy con f_{n_k} hội tụ đều trên các tập compact.*

1.2 Hàm đa điều hòa dưới và miền giả lồi

Định nghĩa 1.2.1. *Cho D là tập mở trong $\mathbb{C}$. Hàm $u : D \to [-\infty, +\infty)$ được gọi là điều hòa dưới trên D nếu u là nửa liên tục trên trên $D, u \neq -\infty$ trên bất kì thành phần liên thông của D và thỏa mãn bất đẳng thức dưới trung bình dưới trên D. Nghĩa là với mọi $x \in D$, tồn tại $r > 0$ sao cho $\overline{\Delta}(x, \rho) \subset D$ và với mọi $0 \leq r < r$ ta có*

$$u(x) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + re^{it})dt.$$

Định lý 1.2.2. *Cho u là hàm điều hòa dưới trên tập mở D_1 và v là hàm điều hòa dưới trên tập mở $D_2 \subset D_1$. Giả sử với mọi $x \in D_1 \cap \partial D_2$ ta có*

$$\limsup_{z \to x} v(z) \leq u(x).$$

Khi đó hàm

$$\tilde{u} = \begin{cases} \max\{u, v\} & \text{trên} D_2 \\ u & \text{trên } D_1 \setminus D_2 \end{cases}$$

là hàm điều hòa dưới trên D_1.

Kết quả sau đây giúp chúng ta trơn hóa hàm đa điều hòa dưới.

Định lý 1.2.3. *Cho u là hàm điều hòa dưới trên tập mở $D \subset \mathbb{C}$ với $u \neq -\infty$. Hàm θ là hàm xác định bởi*

$$\theta(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}} & \text{nếu } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{nếu } \|x\| \geq 1. \end{cases}$$

Với $r > 0$ dương ta đặt

$$\theta_r(z) = \frac{1}{r^2}\theta\left(\frac{z}{r^2}\right) \quad z \in \mathbb{C}.$$

Khi đó $u * \theta_r$ là hàm điều hòa dưới trơn trên D_r và hơn nữa $u * \chi \downarrow u$ trên D.

Mối liên hệ giữa hàm chỉnh hình và hàm đa điều hoà dưới được thể hiện như sau: